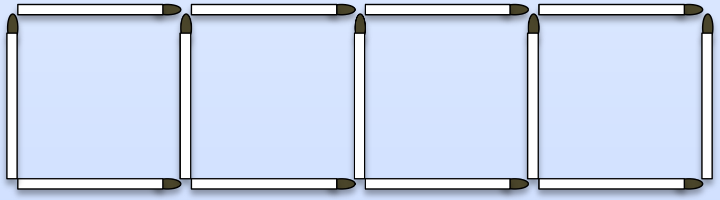
Undervisning för kreativ eller imitativ matematik?

Strängnäs 22/11 2018

Johan Lithner
johan.lithner@umu.se
Umeå Forskningscentrum för Matematikdidaktik
ufm.umu.se

Uppgift med given lösningsmetod

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Om x är antalet kvadrater som ska läggas i rad så kan man beräkna antalet tändstickor y med funktionen

$y=3x+1$

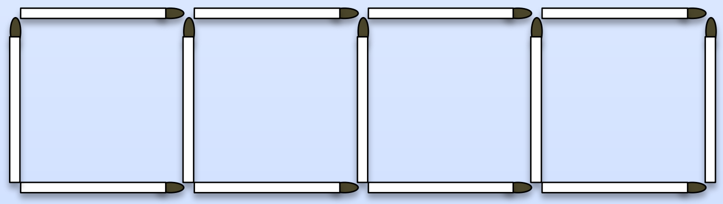
Exempel: Om 4 kvadrater ska läggas i rad behövs

$y=3x+1=3\cdot4+1=13$ tändstickor.

Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

Uppgift utan given lösningsmetod

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

Uppgiftsdesign

- Spelar det någon väsentlig roll för lärandet om lösningsmetoden är given eller om eleven konstruerar den själv?
- Om ja, på vilket sätt?
- Vilket är vanligast i lärandemiljön?
- Vilket är bäst?
- Frågorna ingår i den ena av matematikdidaktikens två huvudfrågor: Hur sker lärande i matematik?

Undervisningsdesign

- En elev kan inte lösa uppgiften ”Vad är 15% av 90?”
- Varför har han svårt?
- På vilka olika sätt kan läraren hjälpa honom?
- Vilka sätt är bäst?
- Frågorna ingår i den andra av matematikdidaktikens huvudfrågor: Hur kan undervisning stödja lärande?

Denna presentation:

- Kommer inte att fullständigt besvara frågorna.
- Fokuserar hur vi handskas med själva matematiken i lärandemiljön,
- inte andra viktiga aspekter som påverkar lärande och undervisning.
- Argumenterar för att skillnaden mellan imitation och konstruktion är avgörande,
- inte minst för centrala lärandemål som problemlösningsförmåga, resonemangsförmåga och begreppsförståelse.

Några termer

- *Problemlösning* innebär att man försöker lösa en uppgift utan att från början veta vilken metod man ska använda för att lyckas. Dvs inte alla matematikuppgifter.
- Att *resonera* är att utveckla och utvärdera matematiska argument, till exempel att motivera varför man använder ett visst metod eller varför en utförd beräkning är korrekt. Dvs inte alla samtal om matematik.
- *Kreativ* används inte i geni - mening, utan i mening att vanliga elever kan konstruera (lämpligt utmanande) lösningsmetoder själva.

Utantillärd formel

S: ”Är $a^5 \cdot a^3 = 2a^{15}$?”

JL: ”Nej, addera exponenterna: $a^5 \cdot a^3 = a^{5+3} = a^8$.”

S: ”Tack, då förstår jag.”

Varför resonerar inte S själv?

$a^m = a \cdot a \cdot a \cdots a$ med m faktorer, så

$a^5 \cdot a^3 = a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a \cdot a = a^8$.

- Forskning pekar på några huvudtyper av orsaker:
  - Hon har inte getts bra möjlighet att förstå eller träna problemlösning
  - Hon har inte uppfattningen att hon kan resonera
- Har agerandet formats av klassrumsaktiviteter?

Fler exempel på elevers svårigheter med matematik

- Hos Konsum kostar en läsk 15 kr. Det är 2 kr mindre än vad den kostar hos ICA. Hur mycket kostar läsken hos ICA? Svar: 15-2=13 kr
- Arnes bästa tid på 100 meter löpning är 11 sekunder. Hur snabbt springer han 10 000 meter? Svar: $100 \cdot 11\text{s} = 1100\text{s}$ = 18min 20s
- $$\begin{array}{r} 31 \\ \underline{-19} \\ 28 \end{array}$$
- Massiv forskningsevidens: svårigheter är ofta kopplade till utantillärande av procedurer som eleven inte förstår (Hiebert 2003), även i mer komplexa situationer.

Läroböcker

”Exempel: Av de 80 eleverna som lämnade Vallaskolan hade 16 sökt till det naturvetenskapliga programmet i gymnasieskolan. Hur många procent av eleverna var det?

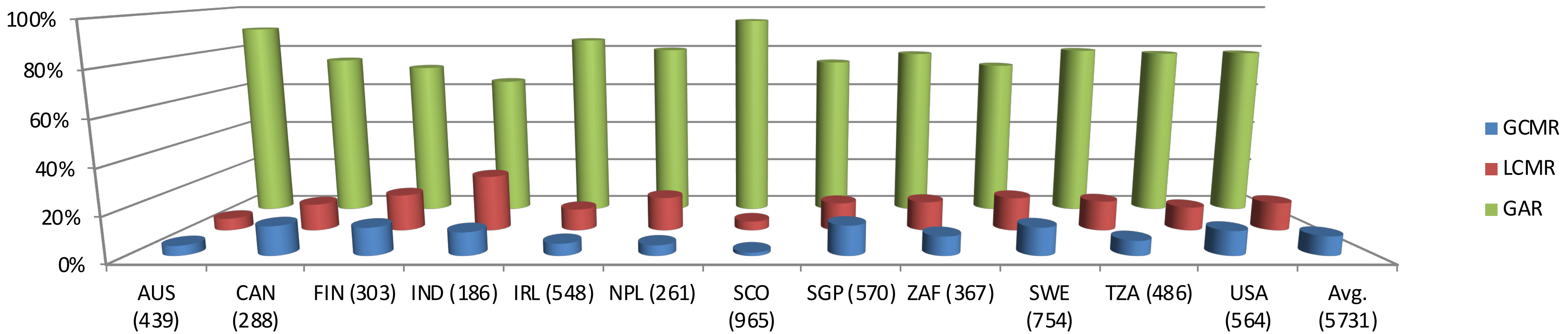
Andel sökande: 16/80 = 0,20 = 20%

Svar: 20% av eleverna sökte det naturvetenskapliga programmet.”

”Uppgift 964: Vid en poliskontroll utanför en skola fann man att 84 bilar av 400 körde för fort. Hur många procent körde för fort?”

- Vilka kompetenser (förmågor) ges möjlighet att träna?

Resonemang som krävs i vanliga gymnasiematematik-läroböcker i 12 länder



- 79% imitativa resonemang, 13% lokalt kreativt resonemang, 9% globalt kreativt resonemang (dvs. problem enligt svenska kursplaner). Relativt homogent över länder.
- Kreativa uppgifter är de svåraste i varje avsnitt, och det är troligt att bara de starkaste eleverna försöker lösa dem.
- Ibland ger läraren metoder till kreativa uppgifter, som då blir imitativa.
- Liknande fördelning i studier av svenska läromedel och prov.

Lärare hjälper elev

Vad är 15% av 90?

$$\begin{array}{r} 90 \\ \underline{\cdot 0.15} \\ 450 \\ \underline{+90} \\ 13.50 \end{array}$$

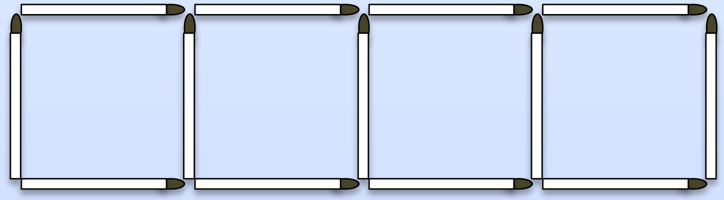
- Läraren tar inte reda på vilka elevens svårigheter är.
- Ingen hjälp att reflektera över strategi- och metodval.
- Vilka kompetenser aktiveras?
- Eleven kan analysera lösningen själv eller försöka memorera att uppgiftstypen kan lösas med metoden.

Hur ge elever möjligheter lära problemlösning, resonemang och matematisk förståelse?

- Svag ’transfer’, dvs. undervisning som aktiverar en kompetens leder inte generellt till att andra kompetenser utvecklas. T.ex. utvecklas inte problemlösningsförmåga och begreppsförståelse av att drilla procedurer. Problemlösning ger dock bättre möjligheter att aktivera andra kompetenser.
- Hur designa uppgifter och undervisning?
- Några exempel från pågående FoU.

Lärande via algoritmiskt resonemang

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:



Om x är antalet kvadrater som ska läggas i rad så kan man beräkna antalet tändstickor y med funktionen

$y=3x+1$

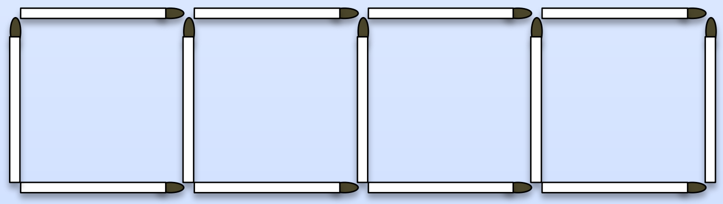
Exempel: Om 4 kvadrater ska läggas i rad behövs

$y=3x+1=3\cdot4+1=13$ tändstickor.

Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

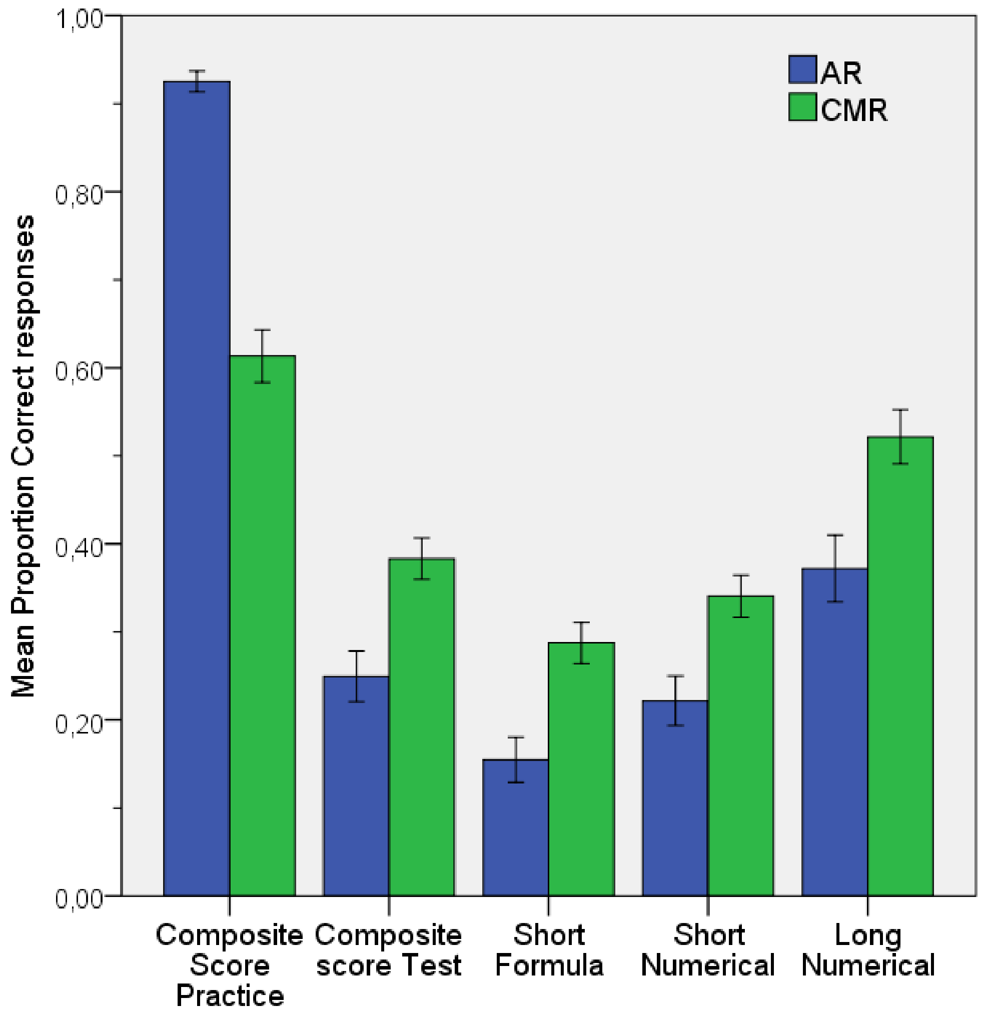
Lärande via kreativt resonemang

När man sätter samman kvadrater i en rad ser det ut som i figuren till höger. Till 4 kvadrater i rad behövs 13 tändstickor:

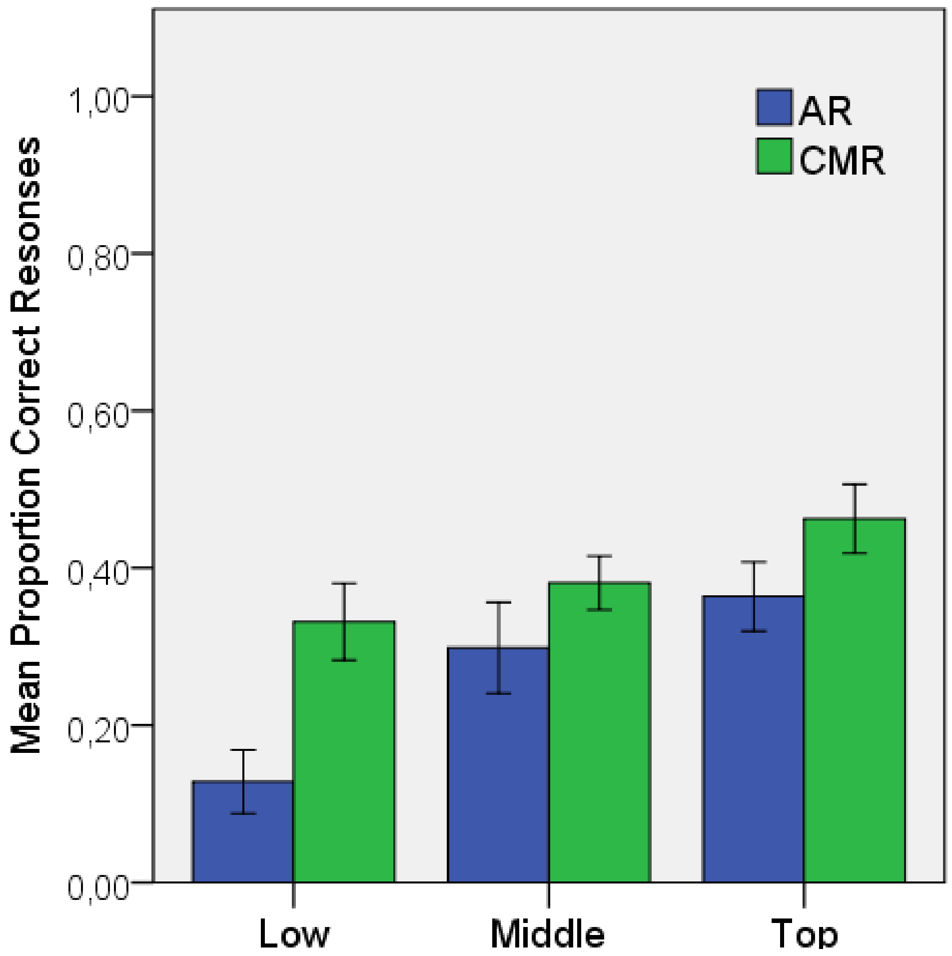


Hur många tändstickor behövs för att få 100 kvadrater i rad?

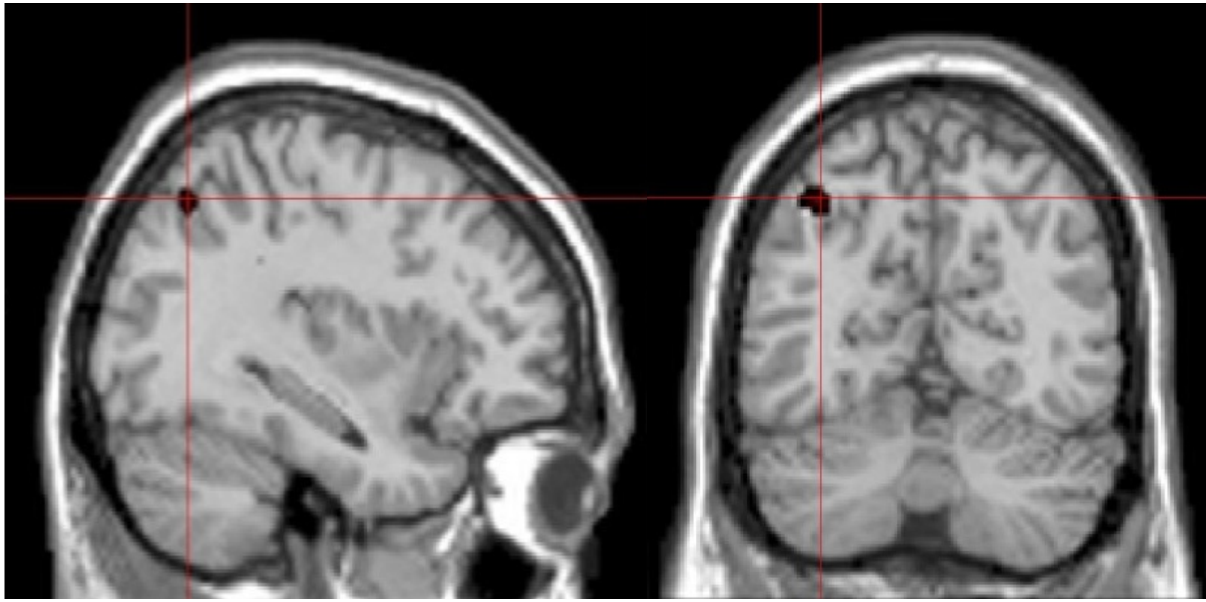
Resultat vid träning och test.



Resultat hos de tre kognitiva tertilerna.

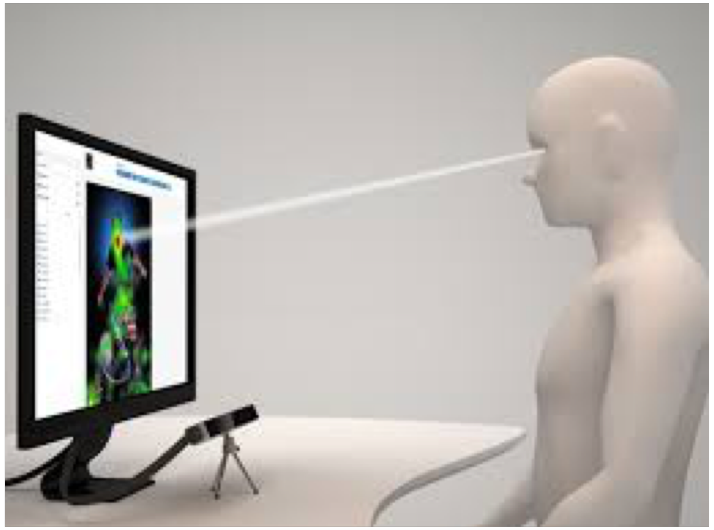


Hjärnavbildning (fMRI)

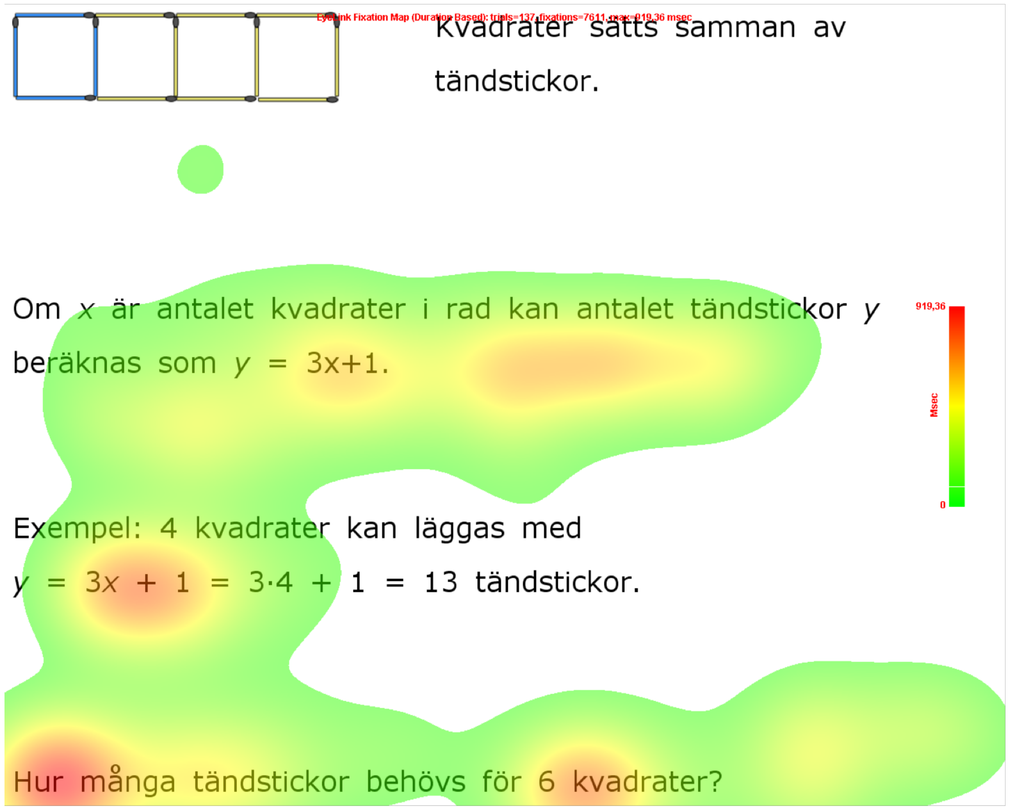


CMR-gruppen hade lägre aktivering i vänster angular gyrus i eftertest, vilket indikerar lägre krav på minnet, men presterade ändå bättre än AR-gruppen

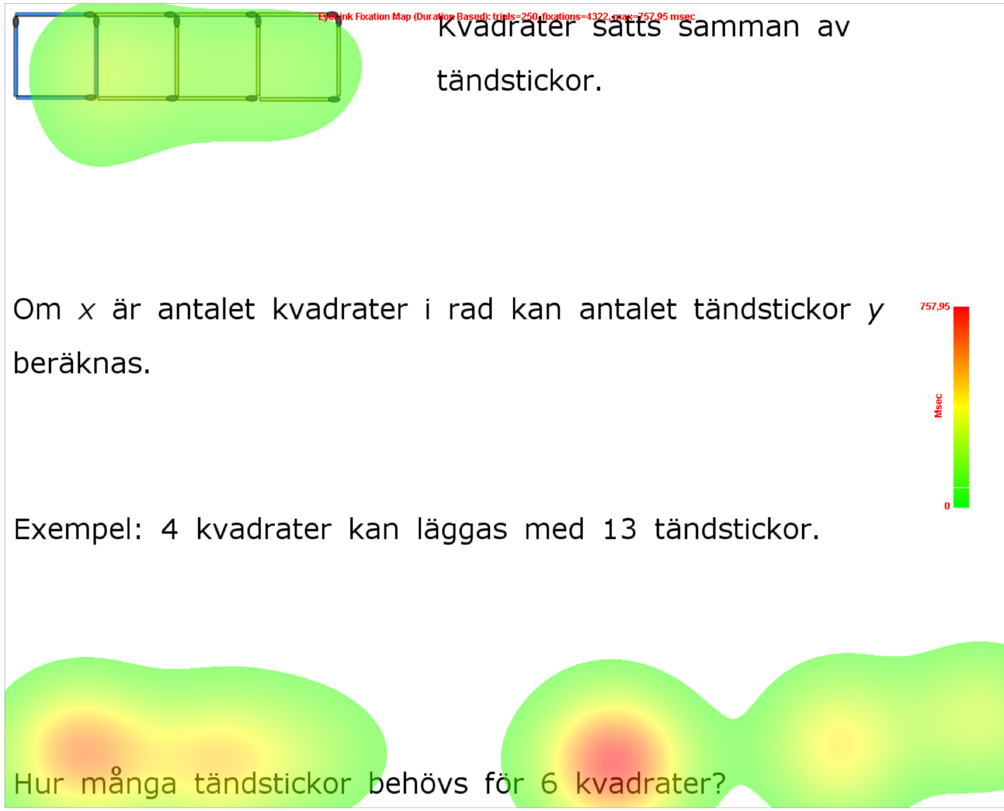
Ögonrörelse



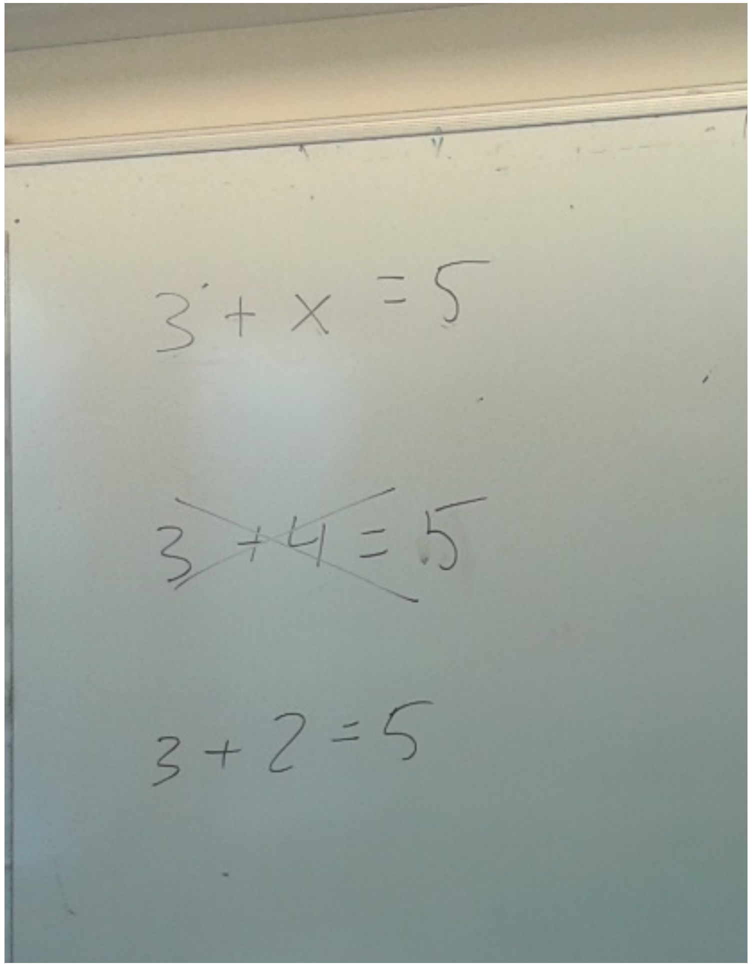
AR



CMR



Pilotstudie ekvationer, åk 7



- Läraren beskriver mål men inte metod
- Eleverna arbetar självständigt med uppgifter
- Läraren försöker undvika att ge lösningsmetod, istället diagnos och formativ feedback som stöder elevens eget resonemang

Pilotstudie ekvationer, åk 7

x+a=b

x+1=3	(se direkt, lära vad ekvationstypen innebär)
x+53=57	(upp x steg från a till b, metod för litet x)
x+5=67	(ner a steg från b till x, embryo till generell metod)
x+54=96	(subtraktion x=b-a, generell metod)

x-a=b

x-2=3	(se direkt, lära vad ekvationstypen innebär)
x-7=52	(upp a steg från b till x, embryo till generell metod)
x-43=4	(upp b steg från a till x, embryo till generell metod)
x-54=33	(addition x=b+a, generell metod)

Pilotstudie ekvationer, elevresultat

Elev	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	tot
1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	36
2	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1																					15
3	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1						32
4	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	0	1	1	0	1																	18
5	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
6	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
7	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
8	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
9	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	0			1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	0		21
10	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	0	1	0	0	0	1	1	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	1	0	25
11	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	34
12	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
13	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
14	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	36
15	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	0	1	1	0	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	35
16	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
17	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	37
18	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1											27
Prop	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9	1,0	1,0	1,0	1,0	1,0	0,9	1,0	0,9	0,9	1,0	1,0	0,8	0,9	0,8	0,8	0,8	0,7	0,7	0,8	0,9	0,9	0,9	0,8	0,8	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,7	0,5	0,9